

Colles de Maths - semaine 11 - MP-MP\*  
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

## Suites et séries de fonctions

**Exercice 1** Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que la formule  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha x}$  définit une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et donner des équivalents de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .

**Exercice 2** Montrer que la formule  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$  définit une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ , et déterminer des équivalents de  $f$  en  $-1$  et  $+\infty$ .

**Exercice 3** Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \sin^{\circ n}(x)$$

pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  ( $\circ n$  signifie composée  $n$  fois).

## Théorèmes d'interversion

**Exercice 4** Donner un développement asymptotique à deux termes quand  $n$  tend vers l'infini de

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt.$$

**Exercice 5** Soit  $T > 0$  et  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  continue.

- Déterminer la limite simple de la suite  $g_n : t \in [0, T] \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u) e^{-kn(t-u)} du$ .
- On suppose que  $\left( \int_0^T f(t) e^{nt} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Montrer que  $f = 0$ .

## Intégrales à paramètres

**Exercice 6** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ . On pose, pour  $\alpha > 0$ ,

$$I(\alpha) = \left( \int_0^1 f(t)^\alpha dt \right)^{1/\alpha}.$$

Déterminer la limite de  $I(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0 et  $+\infty$ .

**Exercice 7** Soit  $a, b > 1$ . Calculer

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx.$$